

Masterarbeit

Certified System Identification

Autor: Philipp Polterauer
Betreuer: Prof. Luigi del Re
 Dr. Harald Kirchsteiger
Fertiggestellt: November 2014

Einführung – Vertrauensbereiche

Betrachtet wurde die Klasse von Systemen in Regressorform

$$y_k = \varphi_k^T \cdot \theta^* + \eta_k.$$

Unter der Annahme $\eta \in \mathcal{N}(0, \lambda)$ gilt folgender Vertrauensbereich:

$$\Omega_{P, Asymp}^{\mathcal{F}} = \left\{ \theta \mid (\hat{\theta}_{LS} - \theta)^T \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot (\hat{\theta}_{LS} - \theta) < d \cdot \gamma_{\chi^2} \right\}$$

$$\mathbf{P} = \lambda^2 \cdot E \left\{ (\Phi^T \Phi)^{-1} \right\}$$

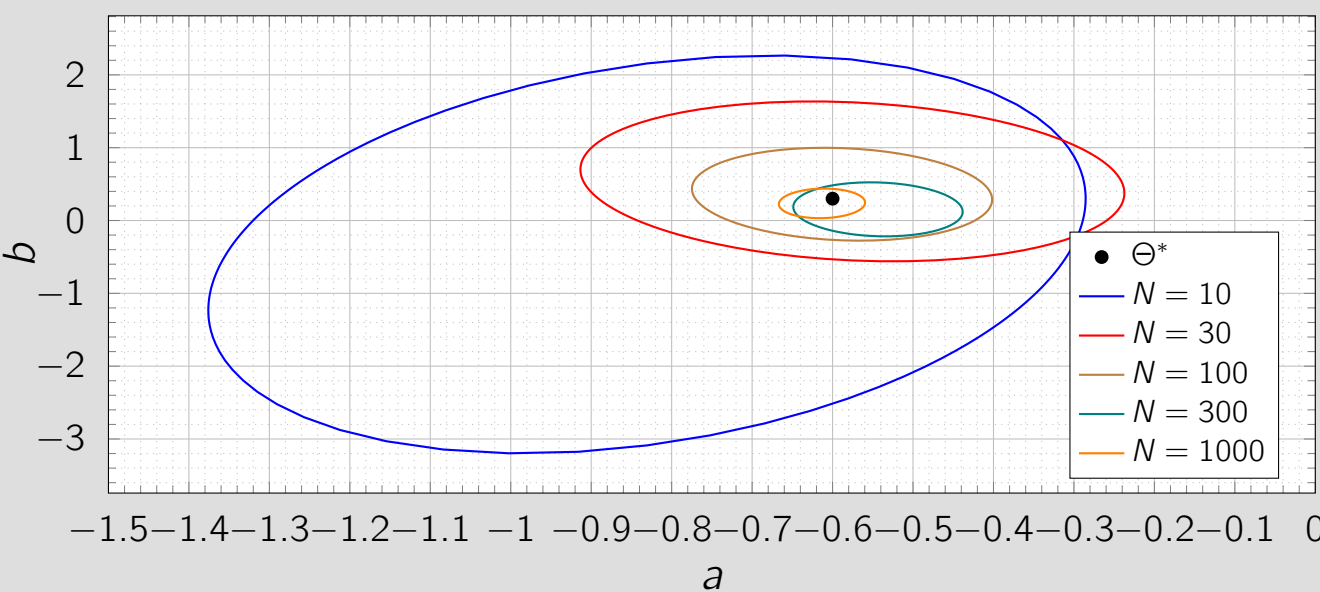
$$P = \mathcal{F}_{\chi^2(d)}(\gamma_{\chi^2})$$

$\lambda^2 \dots$ Varianz des Rauschens
 $\mathbf{P} \dots$ Kovarianzmatrix
 $P \dots$ Wahrscheinlichkeit des Vertrauensbereichs
 $\mathcal{F} \dots$ Verteilungsfunktion der χ^2 -Verteilung

Bei der praktischen Anwendung ist \mathbf{P} jedoch so gut wie nie bekannt, weshalb die klassische Methode die Aufenthaltswahrscheinlichkeit nicht garantieren kann.

Beispiele für einfaches System mit unterschiedlichen Datensatzgrößen mit

$$y_k = a^* \cdot y_{k-1} + b^* \cdot u_{k-1} + \eta_k, \quad [a^*, b^*] = [-0.6, 0.3], \quad P = 90\%$$



Einführung – SPS

Beim SPS-Algorithmus werden weniger Annahmen über das Rauschen η_k gemacht. Die Grundidee ist hier, dass man sich aus den Messungen von y und u mit dem unbekannten Parameter θ die Residuen (Schätzung der η_k) ausdrücken kann.

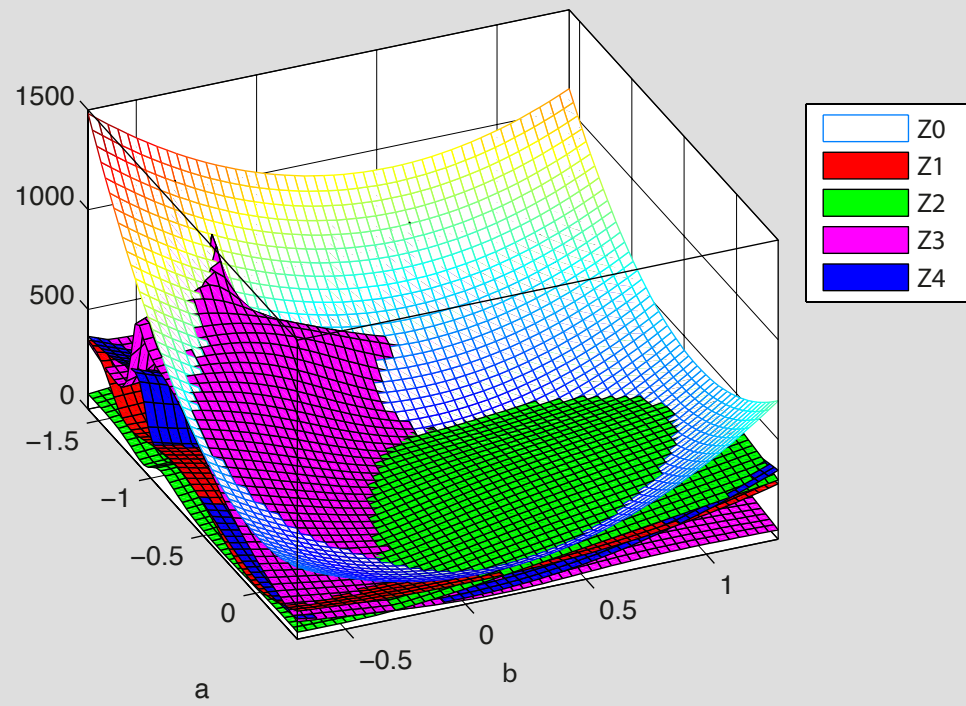
$$\hat{\eta}_k(\theta) = y_k - \varphi_k^T \cdot \theta$$

beim Wert $\theta = \theta^*$ wird $\hat{\eta} = \eta$. Nützt man nun die Annahme, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) von η symmetrisch ist, so kann man sich verschiedene Zahlen Z_i mit ungestörten sowie gestörten (Vorzeichen zufällig wechseln) Residuen ermitteln, welche am Ort des wahren Wertes zu äquivalenten Zufallszahlen werden.

$$Z_0(\theta) = f(\hat{\eta}_1(\theta), \dots, \hat{\eta}_N(\theta))$$

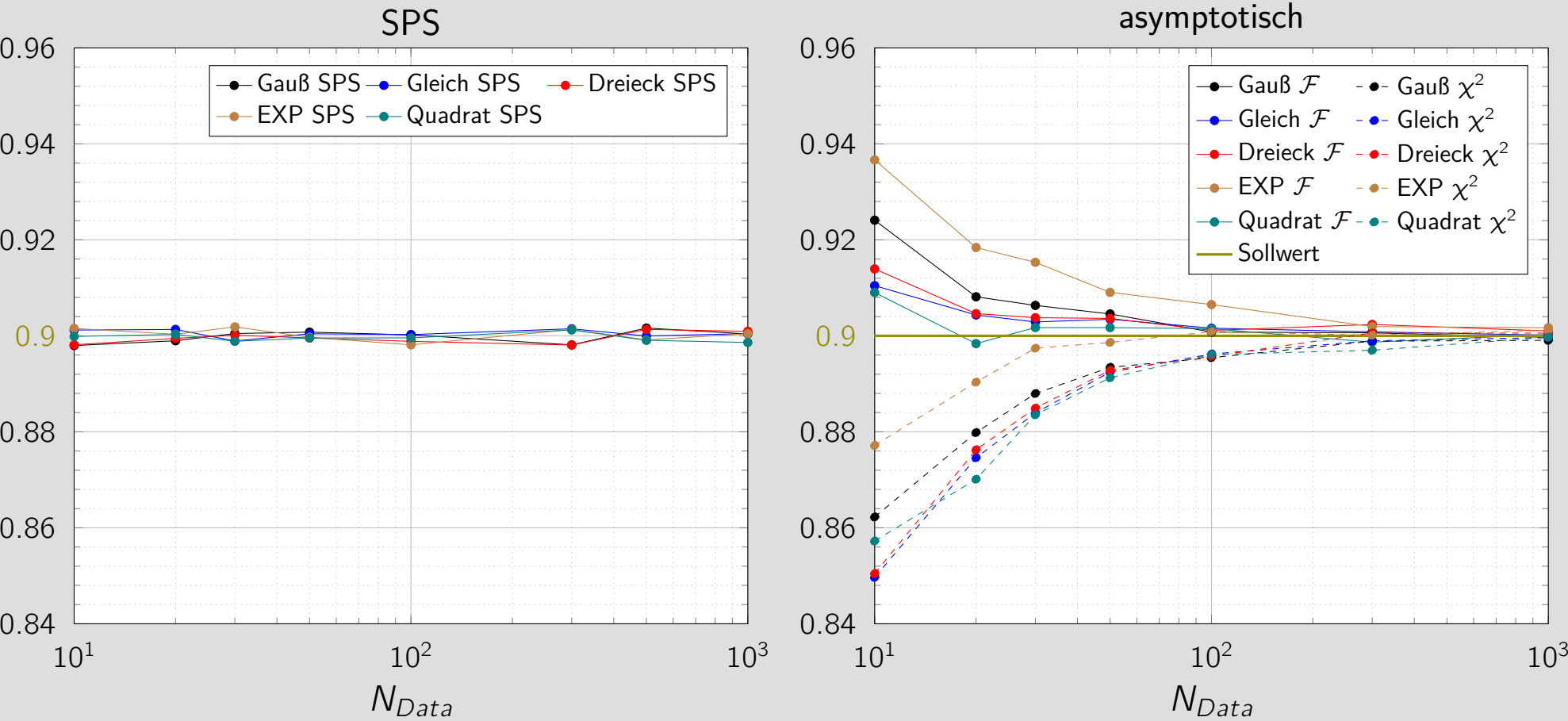
$$Z_{i=1..m}(\theta) = f(\pm \hat{\eta}_1(\theta), \dots, \pm \hat{\eta}_N(\theta))$$

Als Vertrauensbereich wird jener Bereich definiert, wo eine gestörte Zahl $Z_{i=1..m-1}$ größer ist als die Vergleichszahl Z_0 aus den ungestörten Residuen. Dieser Vorgang ist im folgenden Bild für ein einfaches System veranschaulicht.



Ergebnisse der Monte Carlo Simulationen (MCS)

Es wurden MCS durchgeführt um die Performance der Vertrauensbereiche vergleichen zu können. Für jedes Experiment aus der Monte Carlo Serie wurden für festgelegte Datensatzgrößen 100 000 Vertrauensbereiche zu einer gewünschten Wahrscheinlichkeit von $P = 90\%$ erzeugt. Aus der Anzahl jener VB, welche den wahren Wert wirklich beinhalteten wurde eine empirische Wahrscheinlichkeit ermittelt. Der Verlauf dieser ist für die Verwendung der klassischen Theorie bzw. der SPS-Methodik unten abgebildet. Neben Gauß wurden verschiedene Rauschformen verwendet, um die Unabhängigkeit der SPS-Methodik von der Form des Rauschens zu demonstrieren.



Vergleich

In der folgenden Tabelle werden die gefundenen Eigenschaften der beiden untersuchten Verfahren gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass die Vorteile durch andere Nachteile erkauft werden müssen.

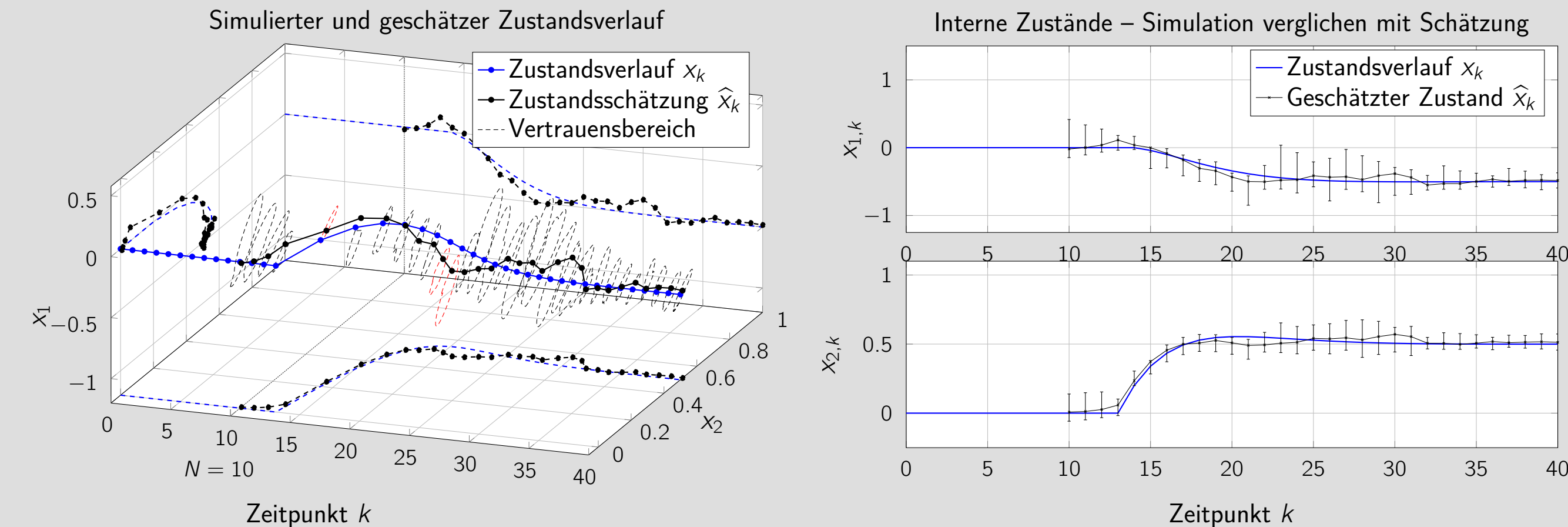
Kategorie Eigenschaft	SPS	Asymptotisch
Performance		
exakte Wahrscheinlichkeit	✓	✗
unbeeinflusst durch Datenmenge	✓	✗
Berechnungsaufwand	Sehr Hoch	Gering
Voraussetzungen Rauschen		
PDF symmetrisch	✓	✓
unabhängiges Rauschen	✓	✓
normalverteilt	✗	✓
zeitlich konstante Verteilung	✗	✓
Vertrauensbereich		
konvex	✗	✓
einfach zusammenhängend	✗	✓
abgeschlossen	✗	✓
reproduzierbar	✗	✓

Beobachter

Basierend auf der Grundidee des SPS wurde eine Strategie entwickelt, wie ein Beobachter mit Vertrauensbereich erzeugt werden kann. Der erhaltene Vertrauensbereich für die Zustandsschätzung hat die gleichen Eigenschaften, wie jener durch SPS generierte bei der Identifikation. Ausgegangen wurde von einem linearen System in Zustandsraumdarstellung, bei welchem die System Parameter \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} bekannt sind.

$$x_{k+1} = \mathbf{A} \cdot x_k + \mathbf{B} \cdot u_k$$

$$y_k = \mathbf{C} \cdot x_k + \mathbf{D} \cdot u_k + \eta_k$$



Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

- Implementierung und Vergleich der Methoden
- Herausarbeiten der Vor- und Nachteile
- Erweiterung der Idee für Zustandsbeobachter

Ausblick

- Praktische Anwendung des SPS in Fällen, bei denen z.B. die exakte Wahrscheinlichkeit besonders wichtig ist
- Beobachter
 - genauere Analysen (numerische Stabilität)
 - Erweiterung auf Systeme mit Zustandsrauschen
- Testen des SPS für andere Klasse von Systemen (z.B. Box-Jenkins)